

ĐỀ 7

Câu 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

- A. 6^3 B. C_6^3 **C.** A_6^3 D. $3!$

Giải

Mỗi số tự nhiên ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử. Suy ra có A_6^3 số

Chọn **C**

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 3$, công sai $d = -2$. Số hạng u_1 bằng:

- A.** 5 **B.** 1 **C.** -6 **D.** -1

Tá có $u_1 = u_2 - d = 3 - (-2) = 5$

Chọn **A**

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Giải

Từ BBT suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. Chọn **D**

Câu 4. Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-5	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A.** 3 **B.** -5 **C.** 0 **D.** 2

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A.** 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 6. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-x-6}$ là

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 0 **D.** 2.

Giải

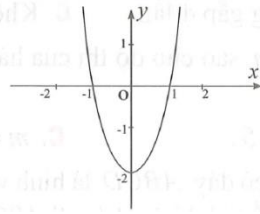
TXD: $(-\infty; 2] \setminus \{-2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn **D**

Câu 7. Đường cong như hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y = x^4 + x^2 - 2$. **B.** $y = 2x^4 + x^2 - 1$. **C.** $y = 2x^4 - 3x^2 - 2$. **D.** $y = -x^4 - 2x^2 - 2$.

Giải

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$ loại đáp án B.

Đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị $ab \geq 0$ nên ta loại đáp án C.

Đồ thị hàm số quay lên nên ta loại đáp án D.

Chọn **A**

Câu 8. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ là

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

Giải

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ chính là

$$\text{số nghiệm thực của phương trình } x^3 - x^2 = -x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}.$$

Chọn **B**

Câu 9. Hàm số $y = \log_2(x+3)$ xác định khi:

A. $x < -3$

B. $x \leq -3$

C. $x > -3$

D. $x \geq -3$

Câu 10. Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x}$

B. $(x^2-x) \cdot 3^{x^2-x-1}$

C. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$

D. $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$

Câu 11. Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{7}{3}}$

B. $a^{\frac{5}{6}}$

C. $a^{\frac{11}{6}}$

D. $a^{\frac{10}{3}}$

Câu 12. Phương trình $2^x = 4$ có nghiệm là:

A. $x = 1$

B. $x = 2$

C. $x = 3$

D. $x = 4$

Câu 13. Số nghiệm thực của phương trình $\log_4 x^2 = \log_2(x^2 - 2)$ là:

A. 0

B. 2

C. 4

D. 1

Giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{cases} \quad (*)$$

Ta có:

$$\log_4 x^2 = \log_2(x^2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_2 |x| = \log_2(x^2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 |x| = \log_2(x^2 - 2) \Leftrightarrow x^2 - 2 = |x|$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 - |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ (thỏa điều kiện (*))}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt. Chọn **B**

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là:

- A. $x^4 + x^2 + C$ B. $3x^2 + 1 + C$ C. $x^3 + x + C$ **D. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$**

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$ **B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$**

C. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{x} + C$ D. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$

Câu 16. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- A. -3 B. 12 **C. -8** D. 1

Câu 17. Tính $\int_0^\pi x(1 + \cos x) dx$. Kết quả là:

- A. $\frac{\pi^2}{3} + 3$ **B. $\frac{\pi^2}{2} - 2$** C. $\frac{\pi^2}{3} - 3$ D. $\frac{\pi^2}{2} + 2$

Câu 18. Tìm phần ảo của số phức $z = 2i(2 - i)$.

- A. -2 B. $4i$ **C. 4** D. 2

Câu 19. Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = -2 + i$. Phần ảo của số phức $\frac{z_1}{z_2}$ bằng:

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{7}{5}i$ **C. $-\frac{7}{5}$** D. $-\frac{4}{5}i$

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3; 1)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng

- A. 1 **B. -3** C. -1 D. 3

Câu 21. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 6a^2$ và chiều cao $h = 8a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

- A. $8a^3$ **B. $16a^3$** C. $48a^3$ D. $24a^3$

Câu 22. Thể tích khối hộp chữ nhật có độ dài ba kích thước lần lượt là 3, 4, 6 bằng:

- A. 72** B. 24 C. 12 D. 18

Câu 23. Cho hình nón có diện tích xung quanh $S_{xq} = 4\pi a^2$ và diện tích đáy bằng $3\pi a^2$. Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng:

- A. $11\pi a^2$ **B. $7\pi a^2$** C. $10\pi a^2$ D. $12\pi a^2$

Câu 24. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2a$, $AD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Quay hình chữ nhật ABCD xung quanh MN tạo thành một hình trụ. Thể tích của khối trụ đó bằng:

- A. $\frac{\pi a^3}{2}$ **B. πa^3** C. $2\pi a^3$ D. $4\pi a^3$

Câu 25. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng:

- A. 25 **B. 23** C. 27 D. 29

Câu 26. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tâm I có tọa độ là:

- A. $(-1; -2; -3)$ B. $(1; 2; 3)$ C. $(-1; 2; -3)$ **D. $(1; -2; 3)$**

Câu 27. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 4z + 10 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A. $P(3; -2; 4)$ B. $Q(2; -1; 3)$ **C. $M(2; 2; -3)$** D. $N(1; 2; -3)$

Câu 28. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

A. $(3; -1; -2)$

B. $(-6; 2; -4)$

C. $(6; 2; -4)$

D. $(-1; 2; 3)$

Câu 29. Một hộp chứa 7 quả cầu xanh, 5 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 quả. Xác suất để 3 quả được chọn có ít nhất 2 quả cầu xanh là

A. $\frac{7}{44}$

B. $\frac{4}{11}$

C. $\frac{7}{11}$

D. $\frac{21}{220}$

Giải

$$n(\Omega) = C_{12}^3$$

Xác suất để 3 quả được chọn có ít nhất 2 quả cầu xanh là: $P = \frac{C_7^2 \cdot C_5^1 + C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{11}$. Chọn **C**

Câu 30. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $m \leq 3$

B. $m > 3$

C. $m \geq 3$

D. $m < 3$

Giải

$$y = x^3 - 3x^2 + mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + m$$

$$\text{Hàm số } y \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 9 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$$

Chọn **C**

Câu 31. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{-x+3}{x-2}$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng

A. 4.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. 3.

D. $-\frac{5}{4}$.

Giải Ta có $y' = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0 \quad \forall x \in [-2; 0]$

Suy ra hàm số $y = \frac{-x+3}{x-2}$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$. Suy ra $\max_{[-2; 0]} y = f(-2) = -\frac{5}{4}$. Chọn **D**

Câu 32. Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-99; 100]$ của bất phương trình $\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^x \geq \left(\cos \frac{3\pi}{10}\right)^{\frac{4}{x}}$ là:

A. 5

B. 101

C. 100

D. 4

Giải

$$\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^x \geq \left(\cos \frac{3\pi}{10}\right)^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^x \geq \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{x} \left(\text{do } 0 < \sin \frac{\pi}{5} < 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $x \in [-99; 100]$ ta có $x \in [-99; -2] \cup (0; 2]$.

Vậy phương trình đã cho có 100 nghiệm nguyên thỏa đề bài

Câu 33. Biết $\int_1^2 f(x)dx = 7$ và $\int_1^3 f(x)dx = 18$. Giá trị $\int_2^3 f(x)dx$ bằng:

A. -25

B. 25

C. 11

D. -11

Câu 34. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Môđun của số phức $2z + (1+i)\bar{z}$ bằng

A. $\sqrt{10}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 2

D. 4

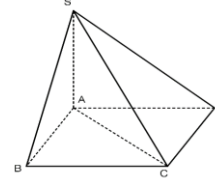
Giải Ta có $2z + (1+i)\bar{z} = 3 - i$. Chọn **A**

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$, $SB = a\sqrt{7}$

đáy $ABCD$ là hình vuông (minh họa như hình vẽ). Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

- A.** 60^0
B. 30^0
C. 45^0
D. 90^0

Giải



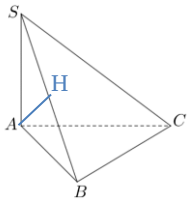
Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc SCA . Ta có $AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = a$, suy ra $AC = a\sqrt{2}$

$$\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SCA = 60^\circ. \text{ Chọn } \mathbf{A}$$

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = AB = 2a$. Tam giác ABC vuông tại B . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng:

- A.** $a\sqrt{3}$ **B.** a **C.** $2a$ **D.** $a\sqrt{2}$

Giải



Gọi H là trung điểm cạnh SB . Khoảng cách từ A đến mp (ABC) là: $AH = \frac{SB}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$.

Phương trình của (S) là:

- A.** $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$ **B.** $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$ **C.** $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$ **D.** $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y-3z+4=0$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) .

- A.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{-3}$ **B.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ **C.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-3}$ **D.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}$

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$

A. 15

B. $\frac{25}{3}$

C. $\frac{19}{3}$

D. 12

Giải

$$g'(x) = (4-2x)f'(4x-x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2-x)[2f'(4x-x^2) + 4-x].$$

Với $x \in [1;3]$ thì $4-x > 0$; $3 \leq 4x-x^2 \leq 4$ nên $f'(4x-x^2) > 0$.

Suy ra $2f'(4x-x^2) + 4-x > 0$, $\forall x \in [1;3]$.

Bảng biến thiên

x	1	2	3
g'	+	0	-
g		$g(2)$	
	$g(1)$		$g(3)$

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$. Chọn **D**

Câu 40. Cho hai số thực $x > 0$, $y \geq -1$ thỏa mãn $2^{x^2 - \sqrt{y+1}} \log_2 x = \log_2 \frac{y}{\sqrt{y+1} - 1}$. Giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{3}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Giải

$$\text{Ta có: } 2^{x^2 - \sqrt{y+1}} \log_2 x = \log_2 \frac{y}{\sqrt{y+1} - 1} \Leftrightarrow \frac{2^{x^2}}{2^{\sqrt{y+1}}} \log_2 x = \log_2 \frac{y(\sqrt{y+1} + 1)}{(\sqrt{y+1} - 1)(\sqrt{y+1} + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot \log_2 x = 2^{\sqrt{y+1}} \cdot \log_2 (\sqrt{y+1} + 1) \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{x^2} \cdot \log_2 x = 2 \cdot 2^{\sqrt{y+1}} \cdot \log_2 (\sqrt{y+1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot \log_2 x^2 = 2^{\sqrt{y+1} + 1} \cdot \log_2 (\sqrt{y+1} + 1) \Leftrightarrow f(x^2) = f(\sqrt{y+1} + 1)$$

Hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2 t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên pt

$$f(x^2) = f(\sqrt{y+1} + 1) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{y+1} + 1, (x \geq 1)$$

$$\Rightarrow y = (x^2 - 1)^2 - 1 \Rightarrow P = x^2 + y = x^2 + (x^2 - 1)^2 - 1 \Rightarrow P = x^4 - x^2, (x \geq 1)$$

Hàm số $g(x) = x^4 - x^2$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$

Suy ra $\min_{[1; +\infty)} g(x) = 0$, khi $x = 1$

Vậy $P_{\min} = 0$ khi $x = 1, y = -1$

Chọn **A**

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } 0 \leq x < 2 \\ -x + 5 & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$. Khi đó $\int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx + \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2 + 1}) dx$ bằng

A. $\frac{19}{2}$

B. $\frac{37}{2}$

C. $\frac{27}{2}$

D. 5

Giải

$$\text{Đặt } u = \ln x \text{ thì } \int_1^{e^2} f(\ln x) \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^2 f(t) \cdot dt = \int_0^2 f(x) \cdot dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) \cdot dx = 5$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 1} \text{ thì } \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2 + 1}) dx = \int_2^5 f(t) \cdot t dt = \int_2^5 (-x + 5) x dx = \frac{27}{2}.$$

Chọn **B**

Câu 42. Cho số phức z có $|z| = 5$. Khi đó, tập hợp các điểm biểu diễn số phức

$w = (3 - 4i)z + 2 + 3i$ là:

A. Đường tròn bán kính $r = 5$.

B. Đường tròn bán kính $r = 25$

C. Đường elip.

D. Đường thẳng.

Giải

Ta có: $w - 2 - 3i = (3 - 4i)z \Rightarrow |w - 2 - 3i| = |3 - 4i||z| = 25$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn bán kính $r = 25$.

Chọn **B**

Câu 43. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = 4a$, AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Góc giữa $(AB'C)$ và $(BB'C)$ bằng 60° . Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $4a^3\sqrt{3}$

B. $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $8a^3\sqrt{2}$

Giải

Từ A kẻ $AI \perp BC \Rightarrow I$ là trung điểm BC .

Ta có $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AI \Rightarrow AI \perp (BB'C'C) \Rightarrow AI \perp B'C$.

Kẻ $IM \perp B'C$ khi đó $B'C \perp MA$.

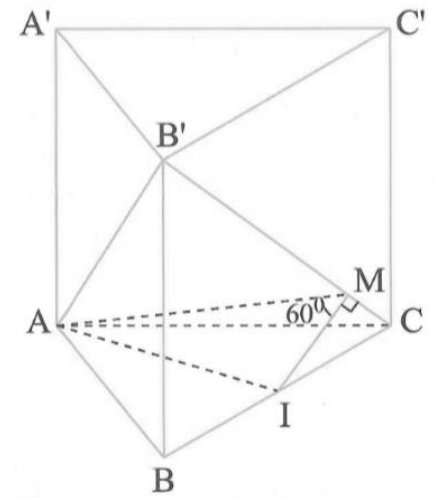
$\Rightarrow$ Góc giữa $(AB'C)$ và $(BB'C)$ bằng góc $AMI = 60^\circ$.

Ta có: $AI = \frac{1}{2}BC = 2a$; $IM = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \sin MCI = \frac{IM}{IC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos MCI = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan MCI = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow BB' = 2a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 8a^3\sqrt{2}$$

Chọn **D**

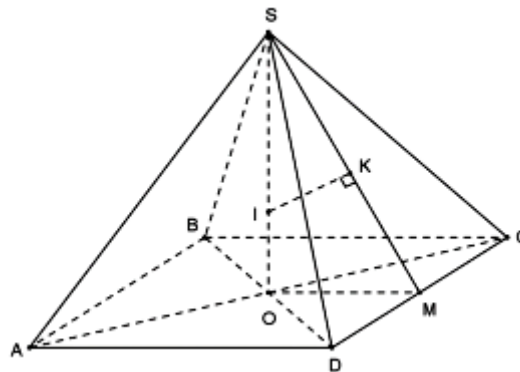
Câu 44. Một loại kẹo có hình dạng là khối cầu với bán kính bằng $1cm$ được đặt trong vỏ kẹo có hình dạng là hình chóp tứ giác đều (các mặt của vỏ tiếp xúc với kẹo). Biết rằng khối chóp đều tạo thành từ vỏ kẹo đó có thể tích bé nhất, tính tổng diện tích tất cả các mặt xung quanh của vỏ kẹo:

A. $12cm^2$

B. $48cm^2$

C. $36cm^2$

D. $24cm^2$

Giải

Giả sử vỏ kẹo có hình dạng là hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , đường cao $SO = h$. Loại kẹo có hình dạng là khối cầu có tâm I .

Gọi M là trung điểm cạnh CD .

Gọi K là hình chiếu của I trên $SM \Rightarrow K$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (SCD) . $\Rightarrow OI = OK = 1$.

$$\text{Ta có } \Delta SKI \sim \Delta SOM \Rightarrow \frac{SI}{SM} = \frac{IK}{OM} \Rightarrow \frac{SO - OI}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{IK}{OM}$$

$$\Rightarrow \frac{h-1}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{1}{\frac{a}{2}} \Rightarrow ah - a = \sqrt{4h^2 + a^2} \Rightarrow h = \frac{2a^2}{a^2 - 4}$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a^2}{a^2 - 4} \cdot a^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^4}{a^2 - 4} = \frac{2}{3} \cdot \left(a^2 - 4 + \frac{16}{a^2 - 4} + 8 \right) \geq \frac{2}{3} \cdot (2.4 + 8) = \frac{32}{3}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow a^2 - 4 = \frac{16}{a^2 - 4} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow h = 4 \Rightarrow OM = \sqrt{2}; SM = 3\sqrt{2}, CD = 2 \cdot OM = 2\sqrt{2}$$

Tổng diện tích các mặt bên của khối chóp $S.ABCD$ là

$$S_{xq} = 4 \cdot S_{\Delta SCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot SM \cdot CD = 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 24$$

Chọn **D**.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0; -1; 2)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}, d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}. \text{ Phương trình đường thẳng đi qua } M,$$

cắt cả d_1 và d_2 là

$$\text{A. } \frac{x}{-\frac{9}{2}} = \frac{y+1}{\frac{9}{2}} = \frac{z+3}{8} \quad \text{B. } \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4} \quad \text{C. } \frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16} \quad \text{D. } \frac{x}{-9} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-2}{16}$$

Giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

$$\Delta \cap d_1 = A(t_1 + 1; -t_1 - 2; 2t_1 + 3); \Delta \cap d_2 = B(2t_2 - 1; -t_2 + 4; 4t_2 + 2).$$

$$\overrightarrow{MA} = (t_1 + 1; -t_1 - 1; 2t_1 + 1); \overrightarrow{MB} = (2t_2 - 1; -t_2 + 5; 4t_2)$$

Ta có: M, A, B thẳng hàng khi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 1 = k(2t_2 - 1) \\ -t_1 - 1 = k(-t_2 + 5) \\ 2t_1 + 1 = 4kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ kt_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ t_2 = -4 \end{cases} \text{ Suy ra } \overrightarrow{MB} = (-9; 9; -16).$$

Đường thẳng Δ đi qua $M(0; -1; 2)$, một vector chỉ phương là $\vec{u} = (9; -9; 16)$

$$\text{có phương trình là: } \Delta: \frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}. \text{ Chọn } \text{C}$$

Câu 46. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

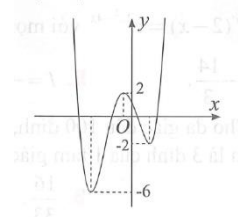
$$y = |f(x + 2018) + m^2| \text{ có 5 điểm cực trị?}$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Giải**

Ta có hàm số $y = f(x + 2018)$ có đồ thị là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tịnh tiến sang trái 2018 đơn vị.

Hàm số $y = f(x + 2018) + m^2$ có đồ thị là đồ thị của hàm số $y = f(x + 2018)$ tịnh tiến lên trên m^2 đơn vị.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Khi tịnh tiến sang trái 2018 đơn vị thì số điểm cực trị hàm số $y = f(x + 2018)$ vẫn là 3 điểm cực trị.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y = f(x + 2018) + m^2$ cũng vẫn là 3 điểm cực trị

Để hàm số $y = |f(x + 2018) + m^2|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x + 2018) + m^2$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt (trừ các điểm cực trị tiếp xúc với trục hoành).

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x) + m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác x_1, x_2, x_3 (với x_1, x_2, x_3 là 3 điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$)

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x) = -m^2$ có 2 nghiệm phân biệt khác x_1, x_2, x_3 (với x_1, x_2, x_3 là 3 điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 \geq 2, & (\text{loại}) \\ -6 < -m^2 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m^2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \leq m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; 2\}$. Chọn **C**

Câu 47. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2^{x-1} = \log_4(x + 2m) + m$ có nghiệm trong khoảng $(-3; 3)$ bằng:

A. 2

B. 4

C. 3

D. 5

Giải

Điều kiện: $x + 2m > 0$.

$$2^{x-1} = \log_4(x + 2m) + m \Leftrightarrow \frac{2^x}{2} = \frac{1}{2} \log_2(x + 2m) + m \Leftrightarrow 2^x = \log_2(x + 2m) + 2m$$

$$\text{Đặt: } t = \log_2(x + 2m) \Rightarrow 2^t = x + 2m.$$

$$\text{Khi đó, ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 2^t = x + 2m \\ 2^x = t + 2m \end{cases} \Rightarrow 2^t - 2^x = x - t \Leftrightarrow 2^t + t = 2^x + x$$

Xét hàm số $f(u) = 2^u + u$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(u) = 2^u \ln 2 + 1$ suy ra $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$f(t) = f(x) \Leftrightarrow t = x \Rightarrow \log_2(x + 2m) = x \Leftrightarrow x + 2m = 2^x \Leftrightarrow 2^x - x = 2m$$

Xét hàm số $y = 2^x - x$ trên $(-3; 3)$ có $y' = 2^x \ln 2 - 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{\ln 2}.$$

Bảng biến thiên

x	-3	$\log_2 \frac{1}{\ln 2}$	3
y'	-	0	+
y	$\frac{25}{8}$	$\frac{1}{\ln 2} + \log_2 \ln 2$	5

Từ bảng biến thiên suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{\ln 2} + \log_2 \ln 2 \leq 2m < 5 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2 \ln 2 \leq m < \frac{5}{2} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2\}. \text{ Vì } \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2(\ln 2) \approx 0,45696$$

Vậy có 2 số nguyên thỏa mãn bài toán. Chọn **A**

Câu 48. Cho hàm số $y = 4x^3 + 2x$. Biết rằng đồ thị hàm số cùng với trục hoành và hai đường thẳng có phương trình $x = a; x = b$ ($a, b \geq 0$) (hai đường thẳng này cách nhau một đoạn bằng 1) tạo ra hình phẳng có diện tích S . Để diện tích S là nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng:

A. 1**B.** 2**C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 3**Giải**

Giả sử $b > a$ khi đó ta có $b - a = 1 \Leftrightarrow b = a + 1$. Ta có diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_a^{a+1} |4x^3 + 2x| \cdot dx = \int_a^{a+1} (4x^3 + 2x) \cdot dx = \left(x^4 + x^2 \right) \Big|_a^{a+1} \\ = (a+1)^4 + (a+1)^2 - a^4 - a^2 = 4a^3 + 6a^2 + 6a + 2 = f(a)$$

Chú ý: $(A+B)^4 = A^4 + 4A^3 \cdot B + 6A^2 \cdot B^2 + 4A \cdot B^3 + B^4$

Xét hàm số $f(a) = 4a^3 + 6a^2 + 6a + 2$ có $f'(a) = 12a^2 + 12a + 6 > 0, \forall a \geq 0$

Suy ra $f(a)$ đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow \min_{[0; +\infty)} f(a) = f(0) = 2$. Với $a = 0 \Rightarrow b = 1$. Chọn **A**

Câu 49. Cho số phức z, w thỏa $|z - 5i| = 3$ và $|w| = |w - 10|$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của $|w - z|$ bằng:

A. 1**B.** 2**C.** $\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{2}$ **Giải**

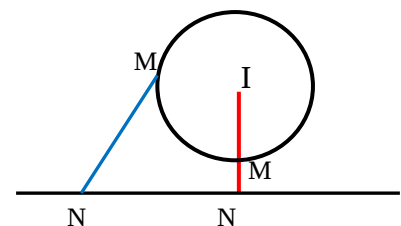
Từ giả thiết ta có tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0; 5)$, bán kính $R = 3$

Tập hợp các điểm N biểu diễn số phức w là đường thẳng d có phương trình $x = 5$.

Để $|w - z| = MN$ nhỏ nhất thì độ dài MN nhỏ nhất, khi đó

$$MN = IN - IM = d[I, (d)] - R = 5 - 3 = 2.$$

Chọn **B**



Câu 50. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB < BC$, $BD = 3\text{cm}$. Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ hợp với nhau góc α ($0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$). Đường chéo $B'D$ hợp với mặt phẳng $(CDD'C')$ một góc β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$). Hai góc α, β thay đổi nhưng thỏa mãn hình hộp $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều.

Giá trị lớn nhất của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\sqrt{3}\text{cm}^3$.

B. $2\sqrt{3}\text{cm}^3$.

C. $6\sqrt{3}\text{cm}^3$.

D. $12\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Giải

Ta có: $\left((ACC'A'), (BDD'B')\right) = \angle COD = \alpha$

Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn nên

$$\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD \quad (\text{góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung } CD)$$

$$\Rightarrow \angle CBD = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow BC = BD \cdot \cos \angle CBD = 3 \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$CD = BD \cdot \sin \angle CBD = 3 \sin \frac{\alpha}{2}$$

Ta có: $\left(B'D, (CDD'C')\right) = \angle B'DC' = \beta$.

Do $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều nên $BC = CC'$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = BC \cdot CD \cdot CC' = 27 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số không âm $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

$$\text{ta có } 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \geq 3 \sqrt[3]{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow 2 \geq 3 \sqrt[3]{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^4 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 8 \geq 27 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^4 \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} \leq 6\sqrt{3} \Rightarrow \text{Max } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6\sqrt{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$. Chọn **C**

